

Über Iterationsverfahren
bei einer Klasse nichtlinearer
Gleichungssysteme

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften der
Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Eckart Gekeler
aus Tübingen

Bochum 1969



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Über Iterationsverfahren
bei einer Klasse nichtlinearer
Gleichungssysteme

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften der
Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Eckart Gekeler
aus Tübingen

Bochum 1969



Dissertation eingereicht am 21. 3. 1969

Tag der mündlichen Prüfung 2. 6. 1969

Dekan: Prof. Dr. G. Ewald

Referent: Doz. Dr. W. Niethammer

Korreferent: Prof. Dr. H. Ehlich

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
<u>Kapitel I.</u> Über die iterative Berechnung einer Lösung der Integralgleichung von HAMMERSTEIN	
§ 1. Die Integralgleichung von HAMMERSTEIN	5
§ 2. Die Relaxation in Gesamt- und Einzelschritten und das Newton-Verfahren	10
§ 3. Der Spektralradius von $J_\omega(X)$ unter Definitheitsvoraussetzungen	15
§ 4. Der Spektralradius von $J_\omega(X)$ bei nicht-symmetrischem Kern K	24
§ 5. Abschätzungen für den Spektralradius von $J_\omega(X)$, die auf dem Satz von PERRON und FROBENIUS beruhen	31
§ 6. Ein Vergleich von Einzel- und Gesamtschrittverfahren bei schwach zyklischem Kern K	42
<u>Kapitel II.</u> Zur numerischen Lösung der Integralgleichung von THEODORSEN	
§ 7. Die Integralgleichung von THEODORSEN	46
§ 8. Iteration bei Symmetrie der Ränderzuordnungsfunktion	51
§ 9. Eine Abschätzung für den Spektralbereich	58
§ 10. Aussagen über den Relaxationsfaktor	64
Literaturverzeichnis	74

Einleitung

Die stürmische Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen in den letzten Jahren hat in der Numerischen Mathematik die iterativen Verfahren in den Vordergrund gestellt und nichtlineare Gleichungssysteme lassen sich, von Sonderfällen abgesehen, vielfach nur iterativ auflösen. Sieht man von Gradientenmethoden ab, so gibt es zwei Klassen von Verfahren, die direkte Iteration, die auf den konstruktiven Fixpunktsätzen beruht, und das Newton-Verfahren. Versucht man hier, das bei linearen Systemen so erfolgreich erprobte Einzelschrittverfahren anzuwenden und Konvergenzaussagen herzuleiten, so zeigt sich, daß an die Gleichungen gewisse Trennbarkeitsforderungen zu stellen sind. Diese Forderungen erfüllt in schöner Weise ein Gleichungssystem, das bei der rechnerischen Lösung der Integralgleichung von HAMMERSTEIN

$$(A) \quad x(y) + \int_G K(y,z)f(z,x(z))dz = 0$$

entsteht und die folgende Gestalt hat:

$$(B) \quad X + K F(X) = 0.$$

K ist dabei eine Matrix, die vom Kern der Integralgleichung herrührt, und F eine vektorwertige Funktion, deren k -te Komponente nur von der k -ten Komponente von X abhängt.

In dieser Arbeit werden zwei Fragestellungen untersucht:

- 1.) Wann ist das System (B) iterativ in Gesamt- und Einzelschritten, eventuell mit Relaxation, lösbar?
- 2.) Wann ist bei der Lösung von (B) nach dem Newton-Verfahren das in jedem Iterationsschritt auftretende lineare Gleichungssystem iterativ auflösbar?

Im ersten Kapitel wird zunächst gezeigt, daß sich beide Fragen parallel behandeln lassen, wenn man sich bei der direkten Iteration auf die Untersuchung der asymptotischen Konvergenzgeschwindigkeit beschränkt. Die anschließend in den Paragraphen 3 und 4 bewiesenen Konvergenzsätze enthalten zum Teil als Spezialfälle bekannte Aussagen über lineare Gleichungssysteme von REICH (1949), OSTROWSKI (1954), NIETHAMMER (1964) u.a.. Besonders übersichtlich werden die Ergebnisse, wenn $F(X)$ monoton ist.

Die in Paragraph 5 angestellten Überlegungen sind gleichbedeutend mit der Frage nach der Konvergenz der Relaxation in Einzelschritten bei einem linearen Gleichungssystem der Form

$$(C) \quad X = B X + C ,$$

in dem B nichtnegative oder nichtpositive Elemente hat. Die für den zweiten Fall gewonnenen Ergebnisse scheinen bisher nicht bekannt zu sein.

Im allgemeinen lassen sich das Einzel- und das Gesamtschrittverfahren bei nichtlinearen Systemen, wenn überhaupt, nur in der Nähe der Lösung miteinander vergleichen. Aus Paragraph 6 geht hervor, daß in der Anwendung auf (B) bei Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens das Einzelschrittverfahren mit dem gleichen Ausgangsvektor p-mal schneller konvergiert, wenn K schwach zyklisch vom Index p ist.

Die Integralgleichung von THEODORSEN in Kapitel II, die bei einer Aufgabe der konformen Abbildung vorkommt, stellt eine spezielle Integralgleichung vom Typ (A) dar. Im zugehörigen System (B) sind jetzt die Matrix K und ihre Eigenwerte bekannt, jedoch ist $F(X)$ nicht monoton und vom ersten Kapitel lassen sich

nur die Ergebnisse des letzten Paragraphen anwenden. In Paragraph 9 wird gezeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen an das Gebiet, auf das der Einheitskreis konform abgebildet werden soll, die iterative Lösung von (B) hier gleichbedeutend ist mit der iterativen Lösung eines linearen Systems der Form (C), wo die Eigenwerte λ der Matrix B in dem Rechteck

$$R = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid b \leq \operatorname{Re} \lambda \leq a < 1, |\operatorname{Im} \lambda| \leq c \}$$

mit $b = -a$ liegen. Im folgenden Paragraphen wird für dieses Problem bei allgemeinem $b \leq a$ ein Satz angegeben, der den optimalen Relaxationsfaktor für die Relaxation in Gesamtschritten liefert. Er stimmt in den Fällen $b = a = 0$ bzw. $c = 0$ mit Ergebnissen von NIETHAMMER (1967) und PETRYSHYN (1965) überein. Für die Relaxation in Einzelschritten berechnen wir den Bereich des Relaxationsfaktors, in dem das Verfahren konvergiert.

Herrn Doz. Dr. W. Niethammer danke ich sehr für die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Ratschläge. Herrn Prof. Dr. H. Ehlich gilt mein Dank für die wohlwollende Unterstützung, die er mir gewährt hat.

Kapitel I. Über die iterative Berechnung einer
Lösung der Integralgleichung von HAMMERSTEIN

§ 1. Die Integralgleichung von HAMMERSTEIN

Integralgleichungen wurden im Gegensatz zu Differentialgleichungen erst in jüngerer Zeit systematisch untersucht und es sei zu Beginn dieser Arbeit an Hand einer wohlbekannten Randwertaufgabe kurz auf den Zusammenhang zwischen beiden hingewiesen. Aus der Differentialgleichung

$$(1.1) \quad \frac{d^2 x}{ds^2} = f(s, x) \quad (s \geq 0)$$

entsteht durch zweimalige Integration die Gleichung

$$(1.2) \quad x(s) = \int_0^s (s - t)f(t, x(t))dt + as + b .$$

Wählt man a und b so, daß die Randbedingung

$$(1.3) \quad x(0) = 0 , x(1) = 0$$

erfüllt ist, so folgt

$$(1.4) \quad a = - \int_0^1 (1 - t)f(t, x(t))dt, \quad b = 0$$

und zusammen mit (1.2) ergibt sich

$$x(s) + \int_0^1 s(1-t)f(t, x(t))dt + \int_0^s (t-s)f(t, x(t))dt = 0$$

oder

$$(1.5) \quad x(s) + \int_0^1 K(s, t)f(t, x(t))dt = 0 ,$$

wobei der Kern

$$K(s, t) = \begin{cases} t(1-s) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s(1-t) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

die Greensche Funktion des Differentialoperators d^2/ds^2 für die Randbedingung (1.3) ist; die stetigen Lösungen von (1.5) erfüllen die Randwertaufgabe.

(1.5) ist eine Integralgleichung vom Typ

$$(A) \quad x(y) + \int_G K(y, z)f(z, x(z))dz = 0 ,$$

wo $G \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes meßbares Gebiet und der Kern K reellwertig und "brauchbar unstetig" sein soll. Für Integralgleichungen dieser Art hat HAMMERSTEIN (1930) in einer grundlegenden Arbeit Existenz- und Eindeutigkeitssätze aufgestellt. Später haben GOLOMB (1935) und VAINBERG (1964) unter Anwendung von Variationsmethoden

die Ergebnisse von HAMMERSTEIN für die Operatorgleichung

$$(B') \quad x + K F(x) = 0$$

verallgemeinert. Einen neuen Anstoß gab die von BROWDER (1962) und MINTY (1963) entwickelte Theorie der monotonen Operatoren (vgl. ANSELONE (1964)), die Existenzsätze für (B') liefert unter Verzicht auf das Vorhandensein eines Potentials für den Operator F .

Ist H ein reeller oder komplexer Hilbert-Raum, so heißt ein Operator $T : H \longrightarrow H$ monoton, wenn für alle $x, y \in H$ gilt

$$(1.6) \quad \operatorname{Re}(Tx - Ty, x - y) \geq 0.$$

Wir zitieren zwei Sätze aus einer Arbeit von AMANN (1968), die für dieses Kapitel wichtig sind.

Satz 1.1 (AMANN (1968))

Es sei

- (i) der lineare Operator $K : H \longrightarrow H$ monoton und der Wertebereich von K abgeschlossen,
- (ii) der Operator $F : H \longrightarrow H$ stetig und es existiere ein $\alpha > 0$, so daß $F - \alpha I$ monoton ist.

Dann besitzt die Gleichung (B') genau eine Lösung.

Satz 1.2 (AMANN (1968))

Es sei

- (i) der lineare Operator $K : H \longrightarrow H$ selbstadjungiert und das negative Spektrum von K in dem Intervall $[-\|K\|, -m]$ ($m > 0$) enthalten,
- (ii) der Operator $F : H \longrightarrow H$ stetig und für alle $x, y \in H$ die Ungleichung

$$\operatorname{Re} (F(x) - F(y), x - y) \geq \left(\frac{2}{m} - k\right) \|x - y\|^2$$

mit $k \|K\| < 1$ erfüllt.

Dann besitzt die Gleichung (B') genau eine Lösung.

Ist das negative Spektrum von K leer, so kann $1/m$ durch 0 ersetzt werden.

Bei der numerischen Behandlung der Integralgleichung (A) von HAMMERSTEIN ersetzt man das Integral nach bekannten Methoden durch eine Summe, z.B. hat NYSTRÖM (1930) für $G \subset \mathbb{R}$ die numerische Integration nach Gauss oder nach Tschebyschew vorgeschlagen. Dann entsteht ein Gleichungssystem

$$(1.7) \quad X + K P F(X) = 0 ,$$

in dem $X^n = (x(y_1), \dots, x(y_n))$ und

$F(X)^T = (f(y_1, x(y_1)), \dots, f(y_n, x(y_n)))$ mit dem durch die Integrationsformel fest vorgegebenen Vektor

$Y = (y_1, \dots, y_n)$ ist. Ferner ist K eine Matrix, die von dem Kern der Integralgleichung herrührt und P die Diagonalmatrix der positiven Gewichtungsfaktoren. Häufig ist K normal. Den Vektor PF bezeichnen wir in Zukunft kurz mit F und schreiben statt (1.7)

$$(B) \quad X + K F(X) = 0.$$

Hierin soll also $F(X)^T = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$ mit stetig differenzierbaren Funktionen f_k sein und für $1 \leq k \leq n$ soll f_k nur von x_k abhängen.

Ein System der Form (B) läßt sich i.a. nur durch Iterationsverfahren lösen. Sieht man von Gradientenmethoden ab, die die Existenz eines Potentials für F voraussetzen, so unterscheidet man zwei Klassen von Verfahren: die direkte Iteration am nichtlinearen System und das Newton-Verfahren. Bei dem letzteren kann man sich fragen, ob das bei jedem Iterationsschritt auftretende lineare Gleichungssystem in einer "inneren Iteration" gelöst werden kann. Im folgenden wird versucht, für die hier besonders leicht anwendbare Relaxation in Einzelschritten Konvergenzaussagen zu machen.

§ 2. Die Relaxation in Gesamt- und Einzelschritten und das Newton-Verfahren

Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Funktion $G : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und konvergiert die Folge

$X_{i+1} = G(X_i)$ ($i \geq 0$) gegen den Fixpunkt $\theta \in D$, so folgt aus dem Mittelwertsatz für hinreichend große i

$$X_{i+1} - \theta = G(X_i) - G(\theta) = G'(Z_i)(X_i - \theta),$$

und es gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|X_{i+1} - \theta\|}{\|X_i - \theta\|} \leq \|G'(\theta)\|.$$

Dabei muß die Vektornorm so gewählt werden, daß sie mit der Matrixnorm $\|G'\|$ verträglich ist. Bezeichnen wir mit $\rho(G'(\theta))$ den Spektralradius von $G'(\theta)$, so gibt es nach HOUSEHOLDER (1964) zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Matrixnorm mit $\|G'(\theta)\| = \rho(G'(\theta)) + \varepsilon$ und es ist naheliegend, analog zum linearen Fall den Wert $\rho(G'(\theta))$ als Maß für die (asymptotische) Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\{X_i\}$ einzuführen:

Definition 2.1

Konvergiert die Vektorfolge $X_{i+1} = G(X_i)$ ($i \geq 0$) unter den obigen Voraussetzungen gegen den Fixpunkt θ , so nennen wir $\rho(G'(\theta))$ den Konvergenz-

faktor ^{*}) der Folge $\{X_i\}$ und schreiben

$$k(\{X_i\}) = g(G'(\theta)) .$$

Wendet man z.B. die Relaxation in Gesamtschritten (RGS) bei dem System (B) an, so ist nach der Vorschrift

$$(2.1) \quad X_{i+1} = (1 - \alpha) X_i - \alpha K F(X_i) \quad (i \geq 0)$$

zu iterieren und es wird

$$(2.2) \quad k(\{X_i\}_{\text{RGS}}) = g((1 - \alpha)E - \alpha K \text{Diag}(F'(\theta))),$$

wobei $\text{Diag}(F'(\theta))$ die Diagonalmatrix mit den Elementen $f'_k(\theta) = f'_k(\lambda_k)$ ($1 \leq k \leq n$) ist. Die RGS ist identisch mit der EULER-KNOPP-Limitierung der Folge

$$\{X_i \mid X_{i+1} = -K F(X_i)\}_{i \geq 0} \quad (\text{vgl. NIETHAMMER (1967)}).$$

Zur Beschreibung der Relaxation in Einzelschritten (RES)

sei L die linke untere und R die rechte obere Dreiecksmatrix von K. Dann ist $K = L + D + R$ mit

$l_{kk} = r_{kk} = 0$ ($1 \leq k \leq n$) und der Diagonalmatrix D.

Das Einzelschrittverfahren (ESV) ergibt für (B) die Iterationsvorschrift

^{*}) Bei quadratischer Konvergenz ist dieser Konvergenzfaktor Null.

$$(2.3) \quad X_{i+1} = -L F(X_{i+1}) - (D + R)F(X_i) \quad (i \geq 0),$$

daher folgt für die RES wie im linearen Fall

$$(2.4) \quad X_{i+1} = (1 - \omega)X_i - \omega L F(X_{i+1}) - \omega(D + R)F(X_i),$$

also

$$(2.5) \quad U_\omega(X_{i+1}) = V_\omega(X_i) \quad .$$

Bei stetig differenzierbaren F ist wegen der besonderen Gestalt von L die Funktion $U_\omega(X) = X + \omega L F(X)$ für beliebige ω und X umkehrbar und die Funktion $U_\omega^{-1} \circ V_\omega - I$ hat die gleichen Nullstellen wie $U_\omega - V_\omega$ (" $\circ$ " und " $-$ " sind die bekannten Operationen im Funktionenraum, I ist die identische Abbildung). Also ist (2.4) gleichbedeutend mit der Iteration

$$(2.6) \quad X_{i+1} = U_\omega^{-1} V_\omega(X_i) \quad (i \geq 0),$$

deren Jacobi-Matrix $J_\omega(X)$ an der Stelle X sich nach bekannten Sätzen leicht berechnen läßt:

$$(2.7) \quad J_\omega(X) =$$

$$\left[E + \omega L \operatorname{Diag}(F'(X)) \right]^{-1} \left[(1 - \omega)E - \omega(D + R) \operatorname{Diag}(F'(X)) \right].$$

Für den Konvergenzfaktor der Folge in (2.4) erhalten wir

$$(2.8) \quad k(\{X_i\})_{\text{RES}} = g(J_w(\theta)) .$$

Soll (B) mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst werden, so besteht ein Iterationsschritt aus der Bestimmung des Residuums

$$(2.9) \quad R_i = X_i + K F(X_i) \quad (i \geq 0)$$

und der anschließenden Berechnung einer verbesserten Näherung

$$(2.10) \quad X_{i+1} = X_i - (E + K \text{Diag}(F'(X_i)))^{-1} R_i .$$

In jedem Newton-Schritt ist also ein lineares Gleichungssystem der Form

$$(2.11) \quad (E + K \text{Diag}(F'(X)))Y = S$$

(iterativ) aufzulösen, wir wollen dies die innere Iteration des Newton-Verfahrens nennen. Bei der Behandlung gemäß der RGS bzw. RES folgt für deren Konvergenzfaktor

$$(2.12) \quad k(\{Y_1\}_{\text{RGSN}}) = \mathfrak{g}((1 - \alpha)E - \alpha K \text{ Diag}(F'(X)))$$

bzw.

$$(2.13) \quad k(\{Y_1\}_{\text{RESN}}) = \mathfrak{g}(J_{\omega}(X)).$$

Nach einem Satz von OSTROWSKI (1966) konvergiert die RES in einer Umgebung des Fixpunktes θ , wenn $\mathfrak{g}(J_{\omega}(\theta)) < 1$ ist. Ein Vergleich von (2.13) und (2.8) zeigt, daß es daher unter globalen Voraussetzungen über F genügt, die RES - und ebenso die RGS - bei dem linearen System (2.11) zu betrachten, die Ergebnisse übertragen sich dann für hinreichend gute Ausgangsvektoren vermöge (2.8) auf die direkte Iteration (2.4). Ein Analogon zum Fixpunktsatz von Banach, wo statt der Lipschitzbedingung nur $\mathfrak{g}(J_{\omega}(X)) < 1$ für einen kompakten Bereich vorausgesetzt wird, ist dem Verfasser nicht bekannt. Im folgenden untersuchen wir die Konvergenzbedingung $\mathfrak{g}(J_{\omega}(X)) < 1$ unter verschiedenen Voraussetzungen über K und F .

§ 3. Der Spektralradius von $J_\omega(X)$ unter Definitiv- heitsvoraussetzungen

Wir setzen zur Abkürzung $\text{Diag}(F'(X)) = V$, $DV = U$ und $J_\omega(X) = J_\omega$ und beweisen zunächst einen Satz über die notwendigen Bedingungen für die Konvergenz der RES. Die Eigenwerte (EW) von J_ω sind die Nullstellen von $\Phi(\lambda) = \det(\lambda E - J_\omega)$. Da $\det(E + \omega LV) = 1$ ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(\lambda) = \det(E + \omega LV) \det(\lambda E - J_\omega) \\ &= \det [(\lambda + \omega - 1)E + \lambda \omega LV + \omega(D + R)V]. \end{aligned}$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich daraus das Produkt aller EW von J_ω

$$\prod_{k=1}^n (-\lambda_k(\omega)) = \det [(\omega - 1)E + \omega(D + R)V],$$

also folgt

$$(3.1) \quad \max_k |\lambda_k(\omega)| \geq \min_k |\omega(1 + u_k) - 1|.$$

Satz 3.1

Es sei $U (= DV)$ und ω reell, dann ist $\rho(J_\omega) \geq 1$ für

$$a) \quad u_k \geq 0 \quad (1 \leq k \leq n) ,$$

$$\text{falls } -\infty < \omega \leq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{2}{1 + \min_k u_k} \leq \omega < +\infty ,$$

$$b) \quad -1 \leq u_k \leq 0 \quad (1 \leq k \leq n) ,$$

$$\text{falls } -\infty < \omega \leq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{2}{1 - \max_k |u_k|} \leq \omega < +\infty ,$$

$$c) \quad u_k \leq -1 \quad (1 \leq k \leq n) ,$$

$$\text{falls } -\infty < \omega \leq \frac{-2}{\min_k |u_k| - 1} \quad \text{oder} \quad 0 \leq \omega < +\infty .$$

Beweis: Es ist klar, daß $\min_k |\omega(1 + u_k) - 1| \geq 1$ für $-\infty < \omega \leq 0$ in a), b) und für $0 \leq \omega < +\infty$ in c) gilt. In den anderen Fällen ist für $1 \leq k \leq n$

$$\text{in a) } \omega(1 + u_k) \geq \frac{2(1 + u_k)}{1 + \min_k u_k} \geq 2 ,$$

$$\text{in b) } \omega(1 + u_k) \geq \frac{2(1 + u_k)}{1 - \max_k |u_k|} = \frac{2(1 + u_k)}{\min(1 + u_k)} \geq 2 ,$$

$$\text{in c) } \omega(1 + u_k) \geq \frac{2(1 + u_k)}{1 - \min_k |u_k|} = \frac{-2(1 + u_k)}{\min|1 + u_k|} \geq 2 .$$

Der folgende Satz enthält als Spezialfälle Ergebnisse von OSTROWSKI (1954) und REICH (1949) (vgl. VARGA (1962)).

Satz 3.2

Es sei V nicht singulär, $\omega \geq 0$, die Diagonalmatrix $((2 - \omega)V^{-1} - \omega D)$ positiv (negativ) definit und K eine hermitesche Matrix. Dann ist $\rho(J_\omega) < 1$ genau dann, wenn $V^{-1} + K$ positiv (negativ) definit ist.

Beweis: Mit einem beliebigen, von Null verschiedenen Ausgangsvektor R_0 bilden wir die Folge

$$(3.2) \quad R_{i+1} = J_\omega R_i \quad (i \geq 0),$$

das ist nach (2.7) gleichbedeutend mit

$$(3.3) \quad (V^{-1} + \omega L)VR_{i+1} = [(1 - \omega)V^{-1} - \omega(D + R)]VR_i.$$

Für $S_i = R_i - R_{i+1}$ und $A = V^{-1} + K$ folgt hieraus

$$(3.4) \quad (V^{-1} + \omega L)VS_i = \omega AVR_i,$$

$$(3.5) \quad \omega AVR_{i+1} = [(1 - \omega)V^{-1} - \omega(D + R)]VS_i.$$

Daraus berechnet man

$$\begin{aligned} (3.6) \quad R_i^* V^* (V^{-1} + \omega L) VS_i - R_{i+1}^* V^* [(1 - \omega)V^{-1} - \omega(D + R)] VS_i \\ = \omega [R_i^* V^* AVR_i - R_{i+1}^* V^* AVR_{i+1}] \end{aligned}$$

oder

$$(3.7) \quad S_i^* V^* ((2 - \omega) V^{-1} - \omega D) V S_i \\ = \omega (R_i^* V^* A V R_i - R_{i+1}^* V^* A V R_{i+1}) \quad (i \geq 0) .$$

Es sei zunächst A positiv (negativ) definit und R_0 ein Eigenvektor (EV) von J_ω

$$R_1 = J_\omega R_0 = \lambda R_0, \quad S_0 = (1 - \lambda) R_0 .$$

Mit dieser Wahl von R_0 wird (3.7) zu

$$(3.8) \quad |1 - \lambda|^2 R_0^* V^* ((2 - \omega) V^{-1} - \omega D) V R_0 \\ = \omega (1 - |\lambda|^2) R_0^* V^* A V R_0 .$$

Aus $\lambda = 1$ folgt $S_0 = 0$ und damit nach (3.4) $A V R_0 = 0$ für $\omega \neq 0$. Da R_0 nach Definition von Null verschieden ist, ergibt dies einen Widerspruch zur Voraussetzung, daß A definit und V nichtsingulär sein soll. Ebenso kann λ nicht gleich -1 sein. Dann wäre nämlich $S_0 = 2 R_0$ und damit nach (3.4)

$$2(V^{-1} + \omega L) V R_0 = \omega A V R_0$$

oder

$$((2 - \omega)V^{-1} - \omega D + \omega(L - R))VR_0 = 0.$$

Das kann aber nicht sein, da $((2 - \omega)V^{-1} - \omega D)$ nach Voraussetzung definit sein soll und die EW von $L - R$ rein imaginär sind. Jetzt ist in (3.8) die linke Seite positiv (negativ) und daher muß $|\lambda| < 1$ sein.

Ist umgekehrt J_ω eine konvergente Matrix und $R_0 \neq 0$ ein beliebiger Ausgangsvektor, so strebt R_i und damit auch $R_i^*V^*AVR_i$ mit wachsendem i gegen Null. Da $((2 - \omega)V^{-1} - \omega D)$ positiv (negativ) definit ist, folgt aus (3.7)

$$(3.9) \quad R_i^*V^*AVR_i \stackrel{\geq}{(\leq)} R_{i+1}^*V^*AVR_{i+1}.$$

Ist A nicht positiv (negativ) definit, so gibt es einen Vektor R_0 mit $0 \stackrel{\geq}{(\leq)} R_0^*V^*AVR_0$. Da alle EW von J_ω von Eins verschieden sind, ist $S_0 = (E - J_\omega)R_0 \neq 0$, also gilt dann die Ungleichung

$$0 \stackrel{\geq}{(\leq)} R_0^*V^*AVR_0 \stackrel{\geq}{(\leq)} R_1^*V^*AVR_1.$$

Das widerspricht aber der Tatsache, daß $R_i^*V^*AVR_i$ gegen Null geht.

Nach Satz 3.1 muß wegen des Vorhandenseins von V und D für $\rho(J_\omega) < 1$ nicht notwendig $\omega > 0$ sein. Der nächste Satz gibt Auskunft über die Konvergenz von J_ω bei negativem ω .

Satz 3.3

Es sei V nichtsingulär, $\omega < 0$, die Diagonalmatrix $((2 - \omega)V^{-1} - \omega D)$ positiv (negativ) definit und K eine hermitesche Matrix. Dann ist $\rho(J_\omega) < 1$ genau dann, wenn $V^{-1} + K$ negativ (positiv) definit ist.

Beweis: Wieder sind die EW von J_ω von $+1$ und -1 verschieden. Setzen wir $A = V^{-1} + K$ negativ (positiv) definit voraus, so muß wegen $\omega < 0$ in (3.8) $|\lambda| < 1$ sein. Ist andererseits J_ω eine konvergente Matrix und $R_0 \neq 0$ ein beliebiger Ausgangsvektor, so folgt wegen positiv (negativ) definitem $((2 - \omega)V^{-1} - \omega D)$ aus (3.7)

$$(3.10) \quad R_1^* V^* A V R_1 \stackrel{(\leq)}{(\geq)} R_{1+1}^* V^* A V R_{1+1} \quad .$$

Der Rest des Beweises verläuft wie in Satz 3.2.

Bei definitem V sind die in Klammern stehenden dualen Aussagen in Satz 3.2 und 3.3 leer.

Unter Berücksichtigung von $\mathfrak{g}(J_\omega) = \mathfrak{g}(-J_\omega)$ ergibt sich aus dem Beweis von Satz 3.2 für $\omega = 1$, $D = 0$ und $R = -L^*$ ein Satz, den NIETHAMMER (1964) für $V = E$ bewiesen hat:

Satz 3.4

Es sei V nichtsingulär, V^{-1} positiv definit und $K = L - L^*$ schiefhermitesch. Dann ist $\mathfrak{g}(J_1) < 1$ genau dann, wenn $V^{-1} + (L + L^*)$ positiv definit ist.

Die obigen Sätze lassen sich übersichtlicher gestalten, wenn man an $F(X)$ in (B) Monotonieforderungen stellt. Es sei

$$(3.11) \quad H_\omega = (E + \omega V^{1/2} L V^{1/2})^{-1} ((1-\omega)E - \omega V^{1/2} (D+R) V^{1/2}),$$

dann ist bei nichtsingulärem V

$$(3.12) \quad H_\omega = V^{1/2} J_\omega V^{-1/2}$$

und H_ω hat die gleichen EW wie J_ω . Setzen wir in den obigen Überlegungen H_ω für J_ω ein und beachten, daß bei positiv oder negativ definitem $V = \text{Diag}(F'(X))$ mit K auch $V^{1/2} K V^{1/2}$ hermitesch bzw. schiefhermitesch ist, so erhalten wir

Satz 3.2 A

Es sei V definit, $\omega > 0$, die Diagonalmatrix $((2 - \omega)E - \omega DV)$ positiv definit und K eine hermitesche Matrix. Dann ist $\varrho(J_\omega) < 1$ genau dann, wenn $(E + V^{1/2}KV^{1/2})$ positiv definit ist.

Satz 3.3 A

Es sei V definit, $\omega < 0$, die Diagonalmatrix $((2 - \omega)E - \omega DV)$ positiv definit und K eine hermitesche Matrix. Dann ist $\varrho(J_\omega) < 1$ genau dann, wenn $(E + V^{1/2}KV^{1/2})$ negativ definit ist.

Satz 3.4 A

Es sei V definit und $K = L - L^*$ schiefhermitesche. Dann ist $\varrho(J_1) < 1$ genau dann, wenn $(E + V^{1/2}(L + L^*)V^{1/2})$ positiv definit ist.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem Beispiel.

Es sei

$$-4 < d_k v_k < -2 \quad (1 \leq k \leq n), \quad -\frac{2}{3} = \frac{-2}{\max |u_k| - 1} < \omega < 0,$$

dann ist $(U = DV)$

$$0 < -\omega(|u_k| - 1) < \frac{2(|u_k| - 1)}{\max |u_k| - 1} < 2 \quad (1 \leq k \leq n),$$

also

$$0 \leq 2 + \omega (|u_k| - 1) = 2 - \omega (1 + u_k) .$$

Daher ist $((2 - \omega)E - \omega DV)$ positiv definit. Hinreichende Bedingung für $\varrho(J_\omega) \leq 1$ ist somit nach Satz 3.3 A bei definitem V die negative Definitheit von

$$E + V^{1/2}KV^{1/2} = E + DV + V^{1/2}(L + R)V^{1/2} ,$$

die durch $\varrho(V^{1/2}(L + R)V^{1/2}) \leq 1$ gewährleistet ist.

§ 4. Der Spektralradius von $J_{\omega}(X)$ bei nicht-symmetrischem Kern K

Jeder EW λ von H_{ω} besitzt einen normierten EV Y , d.h. einen EV Y mit $Y^*Y = 1$. Wir setzen

$$F = V^{1/2}(L + R)V^{1/2}, \quad G = V^{1/2}(L - R)V^{1/2},$$

$$(4.1) \quad Y^*FY = f, \quad Y^*GY = g,$$

$$\omega^{-1}(2 - \omega) = c, \quad Y^*UY = u \quad (U = DV).$$

Lemma 4.1

Bei definitem V läßt sich jeder EW λ von J_{ω} in der folgenden Form darstellen:

$$(4.2) \quad \lambda = \frac{c - f - 2u + g - 1}{c + f + g + 1} = \frac{p}{q}.$$

Beweis: Nach (3.11) und (3.12) gilt

$$2\lambda(E + \omega V^{1/2}LV^{1/2})Y = 2((1 - \omega)E - \omega DV - \omega V^{1/2}RV^{1/2})Y,$$

daraus folgt durch Multiplikation von links mit Y^* die Behauptung wegen

$$2(E + \omega V^{1/2}LV^{1/2}) = 2E + \omega F + \omega G$$

und

$$\begin{aligned} 2((1 - \omega)E - \omega DV - \omega V^{1/2} R V^{1/2}) = \\ = (2 - \omega)E - \omega E - 2\omega DV - \omega F + \omega G . \end{aligned}$$

Definition 4.1

Ist T eine hermitesche Matrix und sind

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n$$

die EW von T , so sei

$$l_T = -\tau_1, \quad r_T = \tau_n .$$

Lemma 4.2 (NIETHAMMER (1964))

Ist in der hermiteschen Matrix T ein Diagonalelement Null, so gilt $0 \in [\tau_1, \tau_n]$, d.h.

$$l_T \geq 0, \quad r_T \geq 0 .$$

Wir zerlegen die Matrizen F und G in ihren hermiteschen und ihren schiefhermiteschen Anteil:

$$\begin{aligned} (4.3) \quad F &= F_S + F_{SS}, \quad F_S = (F + F^*)/2, \quad F_{SS} = (F - F^*)/2, \\ G &= G_S + G_{SS}, \quad G_S = (G + G^*)/2, \quad G_{SS} = (G - G^*)/2 ; \end{aligned}$$

ferner sei U reell und $u_{\min} = \min_k (u_k)$ und
 $u_{\max} = \max_k (u_k)$. Spaltet man f und g in Real- und
 Imaginärteil auf

$$f = f_1 + if_2, \quad g = g_1 + ig_2,$$

so gilt nach bekannten Sätzen über den Wertebereich
 einer Matrix

$$-l_{F_S} \leq f_1 \leq r_{F_S}, \quad -\varrho(F_{SS}) \leq f_2 \leq \varrho(F_{SS}),$$

$$(4.4) \quad -l_{G_S} \leq g_1 \leq r_{G_S}, \quad -\varrho(G_{SS}) \leq g_2 \leq \varrho(G_{SS}),$$

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}.$$

Fragen wir jetzt wieder nach der Konvergenz von J_ω
 bei positivem ω , so muß nach Satz 3.1 notwendiger-
 weise $u_k > -1$ ($1 \leq k \leq n$) sein. Das ist nach Lemma 4.2
 sicher erfüllt, wenn der hermitesche Anteil von
 $E + V^{1/2}KV^{1/2}$ positiv definit ist.

Satz 4.1

Es sei V definit und der hermitesche Anteil von
 $E + V^{1/2}KV^{1/2}$ positiv definit. Dann ist $\varrho(J_\omega) < 1$
 für

$$0 < \omega < \omega_g = \frac{2(1 + u_{\min} - l_{F_S})}{(1 + u_{\max} + l_{G_S})(1 + u_{\min} - l_{F_S}) + \varrho(F_{SS})\varrho(G_{SS})}.$$

Beweis: Wir gehen von (4.2) aus und berechnen

$$(4.5) \quad q\bar{q} - p\bar{p} =$$

$$\begin{aligned} & (c+f_1+g_1+1)^2 + (f_2+g_2)^2 - (c-f_1-2u+g_1-1)^2 - (g_2-f_2)^2 \\ &= (c+g_1)^2 + 2(c+g_1)(1+f_1) + (1+f_1)^2 + f_2^2 + 2f_2g_2 + g_2^2 \\ &- (c+g_1)^2 + 2(c+g_1)(1+f_1) + 4u(c+g_1) - (1+f_1)^2 \\ &- 4u(1+f_1) - 4u^2 - f_2^2 + 2f_2g_2 - g_2^2 \\ &= 4(c+g_1)(1+f_1) + 4f_2g_2 + 4u(c+g_1-f_1-1-u) = 4t. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.1 ist $t \geq 0$ hinreichend für die Konvergenz von J_ω und aus der Voraussetzung folgt, daß

$$(4.6) \quad 1 + u + f_1 \geq 1 + u_{\min} - l_{F_S} \geq 0.$$

Daher ist $t \geq 0$ gleichbedeutend mit

$$(4.7) \quad c \geq u - g_1 - \frac{f_2g_2}{1+u+f_1}.$$

Aus den Ungleichungen (4.4) und (4.6) ergibt sich für die rechte Seite von (4.7) die Abschätzung

$$(4.8) \quad u - g_1 - \frac{f_2 g_2}{1 + u + f_1} \leq u_{\max} + l_{G_s} + \frac{g(F_{ss})g(G_{ss})}{1 + u_{\min} - l_{F_s}}$$

und für positives ω ist $t > 0$ sicher dann, wenn

$$(4.9) \quad \omega \left[1 + u_{\max} + l_{G_s} + \frac{g(F_{ss})g(G_{ss})}{1 + u_{\min} - l_{F_s}} \right] < 2.$$

Der in Klammern stehende Ausdruck ist nach Lemma 4.2 und Voraussetzung größer als Null, daraus folgt die Behauptung.

Für $D = 0$ und $V = E$ wurde dieser Satz von NIETHAMMER (1964) bewiesen; er gibt unter anderem Auskunft darüber, wann man ein positives ω finden kann, so daß $g(J_\omega) < 1$ ist. Ist $E + V^{1/2}KV^{1/2}$ hermitesch und positiv definit, dann ist auch $V^{1/2}KV^{1/2}$ hermitesch und $G = V^{1/2}(L - R)V^{1/2}$ schieferhermitesch. Die Anteile F_{ss} und G_s sind Null, als ist $g(F_{ss}) = l_{G_s} = 0$ und wir erhalten aus (4.9) die Voraussetzung von Satz 3.2 A: $0 < 2 - \omega(1 + u_{\max})$. Ist K schieferhermitesch und V definit, so ist $F_s = G_{ss} = 0$, also ist $V^{1/2}KV^{1/2} = F_{ss}$, $G = G_s$, $l_{G_s} = l_G$ und $r_{F_s} = g(G_{ss}) = 0$. Aus Satz 4.1 folgt

Satz 4.2 (NIETHAMMER (1964))

Es sei V definit und $K = L - L^*$ schieferhermitesch, dann ist $g(J_\omega) < 1$ für

$$0 < \omega < \omega_g = \frac{2}{1 + l_G} \quad .$$

Man beachte, daß nach Lemma 4.2 $l_G \geq 0$ ist.

Satz 4.3

Es sei V definit und der hermitesche Anteil von $E + V^{1/2} K V^{1/2}$ negativ definit. Dann ist $\mathfrak{J}(J_\omega) < 1$ für

$$\frac{2(1 + u_{\max} + r_{F_S})}{(1 + u_{\min} - r_{G_S})(1 + u_{\max} + r_{F_S}) + \mathfrak{J}(F_{SS})\mathfrak{J}(G_{SS})} = \omega_g < \omega < 0 \quad .$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$1 + f_1 + u \leq 1 + r_{F_S} + u_{\max} < 0 \quad ,$$

daher ist $t \geq 0$ gleichbedeutend mit

$$(4.10) \quad c \leq u - g_1 - \frac{f_2 g_2}{1 + u + f_1} \quad .$$

Wir schätzen die rechte Seite nach unten ab:

$$u - g_1 - \frac{f_2 g_2}{1 + u + f_1} \geq u_{\min} - r_{G_S} + \frac{\mathfrak{J}(F_{SS})\mathfrak{J}(G_{SS})}{1 + r_{F_S} + u_{\max}}$$

und erhalten aus (4.10) die zu $t \geq 0$ äquivalente Ungleichung

$$2 \geq \omega \left[1 + u_{\min} - r_{G_s} + \frac{g^{(F_{ss})} g^{(G_{ss})}}{1 + u_{\max} + r_{F_s}} \right] .$$

Der in Klammern stehende Ausdruck ist negativ, da außerdem $1 + u_{\max} + r_{F_s}$ negativ ist, folgt nach kurzer Umwandlung die Behauptung .

§ 5. Abschätzungen für den Spektralradius von $J_{\omega}(X)$,
die auf dem Satz von PERRON und FROBENIUS
beruhen

Sind $A = (a_{jk})$ und $B = (b_{jk})$ zwei $n \times r$ - Matrizen,
so schreiben wir $A \geq B$ ($A \succ B$), wenn $a_{jk} \geq b_{jk}$
($a_{jk} \succ b_{jk}$) für $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq r$ gilt. Ist O die
Nullmatrix und $A \geq O$ ($A \succ O$), so heißt A eine nicht-
negative (positive) Matrix. Ferner sei $|A|$ die Matrix
mit den Elementen $|a_{jk}|$.

Die Anwendung des Gesamt- und Einzelschrittverfahrens
auf ein Gleichungssystem der Form

$$(C) \quad X = B X + C$$

haben STEIN und ROSENBERG (1948) und KAHAN (1958)
untersucht für den Fall, daß B positiv ist und die
Diagonalelemente von B Null sind; bei VARGA (1962)
ist die erste Forderung abgeschwächt. Wir stellen zu-
nächst einige Hilfsmittel bereit.

Definition 5.1 (vgl. VARGA (1962))

Eine $n \times n$ - Matrix A ($n \geq 2$) heißt reduzibel, wenn
es eine Permutationsmatrix P gibt, so daß

$$PA P^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

gilt, wo A_{11} eine $r \times r$ - Matrix und A_{22} eine $(n - r) \times (n - r)$ - Matrix ist ($1 \leq r < n$). Gibt es eine solche Permutationsmatrix P nicht, so heißt A irreduzibel.

Satz 5.1 (PERRON (1907), FROBENIUS (1912))

Es sei $A \geq 0$ eine (irreduzible) $n \times n$ - Matrix, dann gilt:

- (i) $\lambda = \varrho(A) \geq 0$ (> 0) ist EW von A .
- (ii) Zu $\varrho(A)$ existiert ein EV $X \geq 0$ ($X > 0$).
- (iii) Ist $0 \leq |B| \leq A$ und $|b_{jk}| < a_{jk}$ für mindestens ein Paar (j, k) , dann ist $0 \leq \varrho(B) \leq \varrho(A)$ ($0 < \varrho(B) < \varrho(A)$, falls A und B irreduzibel).

Beweis: siehe VARGA (1962) .

Für die Funktionen

$$(5.1) \quad m(s) = \varrho(sL + D + R), \quad n(s) = \varrho(L + s(D + R))$$

gelten in leichter Verallgemeinerung drei Lemmata von KAHAN (1958):

Lemma 5.1

Es ist $m(0) = \varrho(D)$, $n(0) = 0$, $m(1) = n(1) = \varrho(K)$.

Ist ferner $K \geq 0$ und $\varrho(L + R) > 0$, so sind $m(s)$ und $n(s)$ stetige, streng monoton wachsende Funktionen von s für alle $s \geq 0$.

Der Beweis ist der gleiche wie bei VARGA (1962), wenn man dort U durch $D + R$ ersetzt.

Lemma 5.2

Ist $m(s) = 0$ für ein $s > 0$, so ist $m(s) \equiv 0$.

Beweis: Ist $m(s) = \varrho(sL + D + R) = 0$ für ein $s \neq 0$, so gibt es eine Permutationsmatrix P , so daß $P(sL + D + R)P^T$ die Gestalt von R hat (vgl. VARGA (1962)).

Lemma 5.3

Es sei $\tau = \varrho((E - L)^{-1}(D + R))$, dann gilt für $K \geq 0$ und $\varrho(L + R) > 0$

$$m(\tau) = \tau, \quad n(1/\tau) = 1.$$

Beweis: Nach Satz 5.1 ist $\bar{\sigma} = \varrho(K)$ ein EW von K und $\bar{\sigma} > 0$, also gibt es einen Vektor $Y \neq 0$, so daß $(L + D + R)Y = \bar{\sigma} Y$ oder $(E - \bar{\sigma}^{-1} L)^{-1}(D + R)Y = \bar{\sigma} Y$. Für $\bar{\sigma} \geq 1$ gilt daher nach Satz 5.1

$$(5.2) \quad \varrho((E - L)^{-1}(D + R)) \geq \varrho((E - \sigma^{-1}L)^{-1}(D + R)) \geq \sigma.$$

Andererseits ist $\tau = \varrho((E - L)^{-1}(D + R))$ ein EW von $(E - L)^{-1}(D + R)$, also gibt es einen Vektor $Z \neq 0$, so daß $(E - L)^{-1}(D + R)Z = \tau Z$ oder $(\tau L + D + R)Z = \tau Z$. Wenn daher $\tau = 1$ ist, so folgt $\sigma = \varrho(K) \geq 1$ und mit (5.2) ergibt sich

$$(5.3) \quad \varrho((E - L)^{-1}(D + R)) = 1 \implies \varrho(K) = 1.$$

Wegen $\varrho(L + R) \geq 0$ ist $\tau \geq 0$ und es folgt

$$\varrho((E - L)^{-1} \tau^{-1} (D + R)) = 1, \text{ also ist nach (5.3)}$$

$$\varrho(L + \tau^{-1}(D + R)) = 1, \text{ d.h. } n(1/\tau) = 1. \text{ Aus}$$

$n(s) = s \cdot m(1/s)$ folgt der andere Teil der Behauptung.

Bei der in dieser Arbeit vorliegenden Fragestellung ist nach § 2 in (C) $B = -KV$ zu setzen, dann lautet ein Satz von APOSTOLATOS und KULISCH (1967) mit einigen Ergänzungen:

Satz 5.2

Bei nichtpositivem KV gilt genau eine der vier folgenden Beziehungen:

$$(i) \quad 0 = \varrho(J_1) = \varrho(KV),$$

$$(ii) \quad 0 < \varrho(J_1) < \varrho(KV),$$

$$(iii) \quad 1 = \varrho(J_1) = \varrho(KV),$$

$$(iv) \quad 1 < \varrho(KV) < \varrho(J_1).$$

Beweis: O.B.d.A. können wir die Matrix KV mit K bezeichnen.

(i): Es ist $J_1 = (E + L)^{-1}(-D - R) \geq 0$, also

$\tau = g(J_1)$ ein EW von J_1 . Nach dem Beweis von Lemma 5.3 ist daher

$$(5.4) \quad 0 \leq \tau \leq m(\tau) = g(\tau L + D + R)$$

und für $g(L + D + R) = 0$ folgt nach Lemma 5.2 sofort

$\tau = 0$. Andererseits gilt nach Satz 5.1

$$(E + L)^{-1}(-D - R) \geq (E + tL)^{-1}(-D - R) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

und für $\tau = 0$ ist $g((E + tL)^{-1}(-D - R)) = 0$. Wir erhalten für das charakteristische Polynom die Beziehung

$$\phi(\lambda, t) = \det(\lambda E - (E + tL)^{-1}(-D - R)) = \lambda^n. \text{ Es ist}$$

aber $\phi(\lambda, t) = \det(\lambda E + \lambda tL + D + R)$ ein Polynom in

λ und t , daher ist $\phi(\lambda, t) \equiv \lambda^n$. Für $t = \lambda^{-1}$ ergibt

sich $\det(\lambda E + L + D + R) = \lambda^n$, also $g(K) = 0$.

(ii): Jetzt kann nach Lemma 5.3 in (5.4) $\tau = m(\tau)$ ge-

setzt werden. Aus $0 \leq g(K) \leq 1$ folgt wegen der strengen

Monotonie von $n(s)$ mit $n(1) = g(K)$ und $n(1/\tau) = 1$,

daß $1/\tau \geq 1$ also $\tau \leq 1$ ist. Aus der strengen Mono-

tonie von $m(s)$ ergibt sich dann wegen $m(\tau) = \tau$ und

$m(1) = g(K)$ die Ungleichung $\tau \leq g(K)$.

- (iii): Wegen (5.3) ist nur zu zeigen, daß $\tau = 1$ aus $g(K) = 1$ folgt. Das ist richtig wegen $1 = g(K) = m(1) = m(\tau)$ und der strengen Monotonie von $m(s)$.
- (iv): Aus $g(K) \geq 1$ folgt $n(1) = g(K) \geq 1$. Wegen $n(1/\tau) = 1$ ergibt sich $1/\tau \leq g(K)$.

Für $D = 0$ stammt dieser Beweis von KAHAN (1958). Ein genaues Analogon läßt sich bei nicht negativem KV schwer beweisen, jedoch gilt

Satz 5.3

Es sei $KV \geq 0$, dann gilt

- (i) $g(KV) = 0 \implies g(J_1) = 0$,
- (ii) $1 \geq g(KV), g(LV + RV) \geq 0 \implies g(KV) \geq g(J_1)$,
- (iii) $1 = g(KV), g(LV + RV) \geq 0 \implies 1 \geq g(J_1)$,
- (iv) $1 \leq g(J_1) \implies 1 \leq g(KV)$.

Beweis: O.B.d.A. können wir wiederum KV durch K ersetzen. Es ist $g(J_1) = g((E + L)^{-1}(D + R))$.
Wegen

$$-(E - L)^{-1} \leq (E + L)^{-1} \leq (E - L)^{-1}$$

folgt aus Satz 5.1

$$(5.5) \quad g(J_1) \leq g((E - L)^{-1}(D + R)) = \tau.$$

Die Behauptungen (i), (ii) und (iii) folgen nun aus Satz 5.2. Ist $g(J_1) > 1$, so erhalten wir aus (5.4) und Satz 5.1

$$(5.6) \quad 1 < g(J_1) \leq \tau \leq g(\tau L + D + R) \leq \tau g(L + D + R),$$

also $1 \leq g(K)$ nach Division durch τ . Bei irreduziblem K gilt $g(\tau L + D + R) < \tau g(L + D + R)$ und es folgt $1 < g(K)$.

Für die Relaxation in Einzelschritten führen wir zunächst ein Ergebnis von ALEFELD (1968) an:

Satz 5.4 (ALEFELD (1968))

Es sei $KV \leq 0$, $U = DV < 0$ und $g(KV) < 1$, dann gilt

$$(i) \quad g(J_\omega) < 1 \quad \text{für } 0 < \omega \leq \frac{1}{1 - \min |u_k|},$$

$$(ii) \quad g(J_1) \leq g(J_\omega) \quad \text{für } 0 < \omega < 1,$$

$$g(J_\omega) \leq g(J_1) \quad \text{für } 1 < \omega \leq \frac{1}{1 - \min |u_k|},$$

$$(iii) \quad g(J_\omega) \text{ ist für } 0 < \omega \leq \frac{1}{1 - \min |u_k|}$$

eine monoton fallende Funktion von ω . Bei irreduziblem KV ist $g(J_\omega)$ streng monoton fallend und in (ii) wird das Gleichheitszeichen nicht angenommen.

Der Satz bleibt richtig für $DV \neq 0$ und $DV = 0$. Die folgenden zwei Lemmata und der anschließende Satz gehen für $D = 0$ auf KAHAN (1958) zurück.

Lemma 5.4

Es sei $\omega \neq 0$. $\mathfrak{E}$ ist genau dann EW von $T_\omega(K) = (E - \omega L)^{-1}((1 - \omega)E + \omega(D + R))$, wenn $(\mathfrak{E} + \omega - 1)\omega^{-1}$ ein EW von $(\mathfrak{E}L + D + R)$ ist.

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen.

Lemma 5.5

Setzt man $\omega = \omega(s) = (s - 1)(m(s) - 1)^{-1}$ für $K \geq 0$ und $s \geq 0$ in $T_\omega(K)$ ein, so ist s ein EW von $T_\omega(K)$ und daher $s \leq \mathfrak{g}(T_\omega(K))$.

Beweis: Für $\omega = 0$ ist $s = +1$, also s EW von $T_0(K)$. Für $s \geq 0$ ist $m(s)$ nach (5.1) und Satz 5.1 ein EW von $sL + D + R$. Andererseits ist $m(s) = (s + \omega - 1)\omega^{-1}$, also ist s ein EW von T_ω nach Lemma 5.4.

Satz 5.5

Es sei $KV \leq 0$, $\mathfrak{g}(LV + RV) \geq 0$ und $\mathfrak{g}(KV) \geq 1$. Dann ist $\mathfrak{g}(J_\omega) \geq 1$ für alle $\omega \geq 0$.

Beweis: Wir führen den Beweis o.B.d.A. für K statt KV . Nach Lemma 5.4 ist $\mathfrak{E} = 1$ für $\omega \neq 0$ genau dann

ein EW von $J_\omega = T_\omega(-K) \geq 0$, wenn 1 ein EW von $-K$ ist. Dann ist $g(K) \geq 1$ und 1 EW von J_ω für alle Werte von ω , also gilt $g(J_\omega) \geq 1$. Für $s \geq 1$ ist $m(s) = g(sL + D + R) \geq g(L + D + R) = g(K)$. Für $g(K) > 1$ ist daher $\omega(s) = (s-1)(m(s)-1)^{-1}$ eine stetige reelle Funktion für $s \geq 1$, weil $m(s)$ streng monoton wächst ($\omega(1) = 0$). Wäre nun $\omega(s)$ beschränkt für beliebig großes s , etwa $0 \leq \omega \leq c$, dann wäre $g(J_\omega)$ nach Lemma 5.5 unbeschränkt für $0 \leq \omega \leq c$. Das ist aber unmöglich, da $g(J_\omega) = g(T_\omega(-K))$ eine stetige Funktion für alle Werte von ω ist. Jetzt nimmt ω alle positiven Werte an, wenn s von 1 bis ∞ wächst. Zu jedem $\omega > 0$ gibt es daher ein $s > 1$ mit $\omega = \omega(s)$. Diese Zahl s ist nach Lemma 5.5 ein EW von $J_\omega = T_\omega(-K)$.

Daß dieser Satz bei negativen Werten von ω sicher nicht richtig bleibt, zeigt das folgende Beispiel. Es sei $K \geq 0$ und $D = 2E$, dann ist sicher $g(K) > 1$. Es gelte weiter

$$(5.7) \quad \|L\| + \|R\| < 1$$

bezüglich einer multiplikativen Matrixnorm. Es ist

$$T_{-1}(K) = (E + L)^{-1}(-R)$$

$$\|T_{-1}\| = \|(E + L)^{-1}(-R)\| \leq \|(E + L)^{-1}\| \|R\|.$$

Daraus folgt wegen der besonderen Gestalt von L nach (5.7)

$$\|T_{-1}\| = \frac{1 - \|L\|^n}{1 - \|L\|} \|R\| < \frac{1}{1 - \|L\|} \|R\| < 1.$$

Satz 5.6

Es sei $KV \geq 0$, $\varrho(LV + RV) \geq 0$ und $\varrho(KV) < 1$.

Dann ist $\varrho(J_\omega) < 1$ für

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \varrho(KV)}.$$

Beweis: O.B.d.A. können wir die Matrix KV mit K bezeichnen. Nach (2.7) ist

$J_\omega = (E + \omega L)^{-1}((1 - \omega)E - \omega(D + R))$. Für $0 < \omega \leq 1$ ist $|J_\omega| \leq (E - \omega L)^{-1}((1 - \omega)E + \omega(D + R))$, daher folgt $\varrho(J_\omega) < 1$ aus Satz 5.4. Für $\omega \geq 1$ gilt

$$|J_\omega| \leq (E - \omega L)^{-1}((\omega - 1)E + \omega(D + R))$$

und aus Satz 5.2 (ii) folgt $\varrho(J_\omega) < 1$ für

$$(5.8) \quad \varrho((\omega - 1)E + \omega(L + D + R)) < 1.$$

Diese Ungleichung ist gleichbedeutend mit

$$(5.9) \quad -\frac{1}{\omega} < \frac{\omega - 1}{\omega} - \varrho(K), \quad \frac{\omega - 1}{\omega} + \varrho(K) < \frac{1}{\omega}.$$

Die erste Ungleichung in (5.9) ist erfüllt für $g(K) < 1$, die zweite für $0 < \omega < 2/(1 + g(K))$.

§ 6. Ein Vergleich von Einzel- und Gesamtschrittverfahren bei schwach zyklischem Kern K

Bei nichtlinearen Gleichungssystemen kann man das Einzel- und das Gesamtschrittverfahren, wenn überhaupt, nur in der Nähe der Lösung miteinander vergleichen. Das liegt daran, daß man hier die globale Konvergenzbedingung, die bei linearen Gleichungssystemen durch den Spektralradius des Iterationsoperators gegeben ist, nicht besitzt. In einem Sonderfall lassen sich jedoch globale Aussagen gewinnen.

Erfüllt F in einer Umgebung $\mathcal{U}(\theta)$ des Fixpunktes θ von (B) eine Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten 1 und gilt

$$(6.1) \quad \epsilon = \|K\| \cdot 1 < 1,$$

so konvergiert das Gesamtschrittverfahren (GSV)

$$(6.2) \quad X_{i+1} = -K F(X_i) \quad (i \geq 0)$$

nach dem Fixpunktsatz von Banach, falls X_0 und X_1 in $\mathcal{U}(\theta)$ liegen.

Die $n \times n$ -Matrix K heißt schwach zyklisch vom Index p

($p \geq 1$), wenn es eine Permutationsmatrix P gibt, sodaß gilt

$$(6.3) \quad P A P^T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & K_{1,p} \\ K_{2,1} & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & K_{p,p-1} & 0 \end{pmatrix},$$

wo die K_{jk} Blockmatrizen und die in der Diagonalen stehenden 0-Matrizen quadratisch sind (vgl. VARGA (1962)).

Satz 6.1

Die Matrix K sei schwach zyklisch vom Index p und in der Darstellung (6.3) von K seien die K_{jk} quadratisch. Dann konvergiert das Einzelschrittverfahren (ESV), angewandt auf

$$X = - PKP^T PF(P^T X) = - PKP^T \tilde{F}(X)$$

genau dann, wenn das GSV konvergiert. Unter der Bedingung (6.1) gilt ferner für die Iterierten X_i des ESV

$$\|X_{i+1} - X_i\|_E \leq \varepsilon^p \|X_i - X_{i-1}\|_E,$$

$$\|x_i - \theta\|_E \leq \frac{\varepsilon^{pi}}{1 - \varepsilon^p} \|x_1 - x_0\|_E$$

$\|\cdot\|_E = \text{Euklid-Norm}$

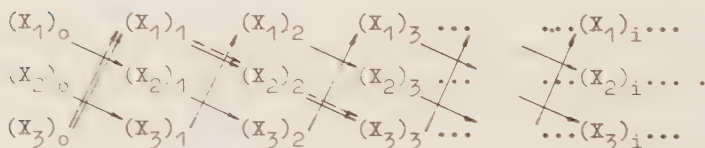
Beweis: In der Matrix PKP^T haben die Blockmatrizen K_{jk} alle die gleiche Ordnung $q = n/p$. Zerlegen wir X in die Vektoren

$$(x_k) = (0, \dots, 0, x_{(k-1)q+1}, \dots, x_{kq}, 0, \dots, 0) \quad (1 \leq k \leq p),$$

so ergibt sich für die i -te Iterierte $x_{i,G} = ((x_1)_i, \dots, (x_p)_i)$ des GSV

$$(6.4) \quad \begin{aligned} (x_1)_i &= -K_{1p} \tilde{F}((x_p)_{i-1}) \\ (x_k)_i &= -K_{k,k-1} \tilde{F}((x_{k-1})_{i-1}) \quad (2 \leq k \leq p). \end{aligned}$$

Diese Iterationsfolge kann für $p = 3$ durch das folgende Schema veranschaulicht werden:



Der erste Schritt des ESV ist durch die gestrichelten Pfeile angedeutet, allgemein erhalten wir im i -ten Iterationsschritt beim ESV den Vektor

$$X_{i,E} = ((X_1)_{p(i-1)+1}, (X_2)_{p(i-1)+2}, \dots, (X_p)_{pi})$$

durch

$$(X_1)_{p(i-1)+1} = -K_{1,p} \widetilde{F}((X_p)_{p(i-1)}) ,$$

$$(X_k)_{p(i-1)+k} = -K_{k,k-1} \widetilde{F}((X_{k-1})_{p(i-1)+k-1}) \\ (2 \leq k \leq p).$$

Das ESV konvergiert also bis auf $p(p-1)/2$ Blockiterationen p -mal so schnell wie das GSV. Erfüllt weiter ε bezüglich der Euklid-Norm die Bedingung (6.1), so folgt

$$\| (X_k)_{pi+k} - (X_k)_{p(i-1)+k} \|_E \leq \varepsilon^p \| (X_k)_{p(i-1)+k} - (X_k)_{p(i-2)+k} \|_E \\ (1 \leq k \leq p, i \geq 2).$$

$$\text{Es ist } \|X_{i,E}\|_E^2 = \sum_{k=1}^p \| (X_k)_{p(i-1)+k} \|_E^2 \text{ und}$$

$$\|X_{i+1,E} - X_{i,E}\|_E \leq \varepsilon^p \|X_{i,E} - X_{i-1,E}\|_E \quad (i \geq 1),$$

daraus folgt der letzte Teil der Behauptung.

Für $p = 2$ geht der Satz auf NIETHAMMER (1966) zurück.

Kapitel II . Zur numerischen Lösung der Integral- gleichung von THEODORSEN

§ 7. Die Integralgleichung von THEODORSEN

Soll das Innere des Einheitskreises $z = \exp(i\varphi)$ konform auf das einfach zusammenhängende Gebiet mit dem Rand $R: w = g(\xi)\exp(i\xi)$ abgebildet werden, so ist diese Aufgabe im wesentlichen gelöst, wenn man die Ränderzuordnungsfunktion $\xi = \xi(\varphi)$ kennt. Bei geeigneter Normierung ist $\xi(\varphi) - \varphi$ die konjugierte Funktion zu $\log g(\xi(\varphi))$ und $\xi(\varphi)$ genügt daher der nichtlinearen, singulären Integralgleichung

$$(7.1) \quad \xi(\varphi) = \varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log g(\xi(t)) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - t}{2} dt ,$$

in welcher der Cauchysche Hauptwert zu nehmen ist (THEODORSEN (1931), THEODORSEN und GARRICK (1933)). Die THEODORSEN-Integralgleichung (7.1) besitzt nach dem Riemannschen Abbildungssatz stets mindestens eine Lösung und diese ist in $[-\pi, \pi]$ streng monoton wachsend, weil die zugrunde gelegte Abbildung konform sein soll.

Bei der Lösung von (7.1) nach der Methode von WITTICH (1941) zerlegt man das Intervall $[-\pi, \pi]$ in $2N$ Teilintervalle der Länge π/N . Ist dann für eine Lösung $\xi(\varphi)$ von (7.1)

$$T(\varphi) = \sum_{n=0}^N (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad (B_0 = B_N = 0)$$

das normierte trigonometrische Polynom, das an den Stellen $\varphi_k = k\pi/N$ ($-N \leq k \leq N$) die Werte $\log \varrho(\xi(\varphi_k))$ annimmt, so hat die Gleichung

$$(7.2) \quad \tilde{\xi}(\varphi) = \varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\tilde{\xi}(t)) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - t}{2} dt \quad (H)$$

ebenfalls mindestens eine in $[-\pi, \pi]$ streng monoton wachsende Lösung $\tilde{\xi}(\varphi)$. Betrachten wir (7.2) speziell an den Stellen φ_k und fassen die $\tilde{\xi}(\varphi_k)$ zu einem Vektor X und die φ_k zu C zusammen, so ergibt sich aus (7.2) (vgl. GAIER (1964)), daß die Werte das nichtlineare Gleichungssystem

$$(7.3) \quad X = C + W \operatorname{Log} \varrho(X)$$

erfüllen, in dem $\operatorname{Log} \varrho(X)$ der Vektor mit den Koeffizienten $\log \varrho(x_k)$ und W die Matrix vom Grad $2N$ mit den Elementen

$$\begin{aligned}
 (7.4) \quad w_{jk} &= 0, \text{ falls } j - k \text{ gerade} \\
 w_{jk} &= \frac{1}{N} \operatorname{ctg} \frac{(j - k)\pi}{2N}, \text{ falls } j - k \text{ ungerade} \\
 &\quad (-N+1 \leq j \leq N, -N+1 \leq k \leq N)
 \end{aligned}$$

ist. Ist θ eine für das gestellte Problem in Frage kommende Lösung von (7.3), so ist θ nach dem über (7.2) Gesagten streng monoton in dem Sinne, daß $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ für $-N + 1 \leq k \leq N$ gilt.

Wir wenden uns jetzt der Funktion $g = g(\xi)$ zu. Man sagt, g erfülle eine ε -Bedingung, wenn

$$\begin{aligned}
 (7.5) \quad (i) \quad &g(\xi) \text{ absolut stetig in } [0, 2\pi] \text{ ist, und} \\
 (ii) \quad &\left| \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} \right| \leq \varepsilon \text{ für fast alle } \xi \in [0, 2\pi] \text{ gilt.}
 \end{aligned}$$

$\varepsilon < 1$ ist hinreichend für die Eindeutigkeit einer Lösung von (7.1) oder (7.3), doch bleiben unsere Überlegungen nicht auf diesen Fall beschränkt.

Wir wollen wie im vorigen Kapitel die RGS und die RES auf die innere Iteration des Newton-Verfahrens einerseits und auf das nichtlineare System andererseits anwenden und unter einer Symmetriebedingung über $g(\xi)$ Aussagen über den Relaxationsfaktor bezüglich der uns

zugänglichen Information gewinnen. Dazu setzen wir voraus:

- (i) Die Ränderzuordnungsfunktion $g = g(\xi)$ sei symmetrisch zur x- und y-Achse, d.h.
 $g(\xi) = g(-\xi)$ für $-\pi \leq \xi \leq \pi$;
 $(7.5) \quad g(\xi) = g(\pi - \xi)$ für $-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$.
- (ii) $g(\xi)$ sei monoton für $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$.
- (iii) $g(\xi)$ erfülle eine ξ - Bedingung.
- (iv) Es sei in (7.4) $N = 2M$ mit ungeradem M .

An den Stellen ξ , wo $g'(\xi)/g(\xi)$ nicht existiert, kann dieser Wert durch Null ersetzt werden. Wegen der Symmetrie kann also insbesondere

$$(7.6) \quad \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0 \quad \text{für} \quad \xi = k \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq k \leq 2)$$

und in (2.11)

$$(7.7) \quad y_{-N/2} = y_0 = y_{N/2} = y_N = 0$$

gesetzt werden. Wir können somit statt (2.11) das System

$$(7.8) \quad \tilde{E} \left[E - W \text{Diag}((\text{Log } g(X_i))') \right] \tilde{E} Y = - \tilde{E} R_i \quad (i \text{ fest})$$

betrachten, wobei $\tilde{E}$ aus der Einheitsmatrix entsteht, wenn dort diejenigen Elemente durch Null ersetzt werden, deren Indizes Vielfache von $N/2$ sind. Für die nichtlineare Iteration bedeutet dies, daß wir die Iterierten gemäß

$$(7.9) \quad X_{i+1} = G + \tilde{E} W \operatorname{Log} g(X_i) \quad (i \geq 0)$$

bilden. Im nächsten Paragraphen untersuchen wir die Gestalt der iterierten Vektoren in (7.9) und beim Newton-Verfahren und zeigen, daß man unter Ausnutzung der Symmetrie an Stelle von (7.8) und (7.9) mit einem auf den Grad $(N - 2)/2 = M - 1$ reduzierten System arbeiten kann.

§ 8. Iteration bei Symmetrie der Ränderzuordnungsfunktion

Die Matrix W ist von "zyklischer Bauart" (vgl. ZURMÜHL (1964)): die Elemente der ersten Zeile sind

$$(8.1) \quad w_{1k} = \begin{cases} 0 & k = 0, 2, \dots, 2N - 2 \\ -\frac{1}{N} \operatorname{ctg} \frac{k \cdot \pi}{2N} & k = 1, 3, \dots, 2N - 1 \end{cases}$$

und die übrigen Zeilen entstehen durch zyklische Permutation der Elemente in der ersten Zeile. Alle EW von W lassen sich daher angeben (OSTROWSKI (1952)), (GAIER (1964)):

$$(8.2) \quad \lambda_0 = 0, \lambda_1 = \dots = \lambda_{N-1} = -i, \lambda_N = 0, \lambda_{N+1} = \dots = \lambda_{2N-1} = i.$$

Wir zerlegen W auf die folgende Weise

$$(8.3) \quad W = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_4 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_3 & A_4 & A_1 & A_2 \\ A_2 & A_3 & A_4 & A_1 \end{pmatrix}, \quad A_k = (a_{ij}^{(k)})_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq M}},$$

dann gilt

$$(8.4) \quad A_1 = -A_1^T, \quad A_2 = -A_4^T, \quad A_3 = -A_3^T,$$

weil W schiefsymmetrisch ist.

Nach (8.3) erhalten wir für die Elemente der Blockmatrizen A_k

$$(8.5) \quad a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } (i-j) \text{ gerade} \\ \frac{1}{N} \operatorname{ctg} \frac{(i-j-(k-1)M)\pi}{2N} & \text{für } (i-j) \text{ ungerade} \end{cases} \quad k = 1, 3$$

$$(8.6) \quad a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{N} \operatorname{ctg} \frac{(i-j-(k-1)M)\pi}{2N} & \text{für } (i-j) \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } (i-j) \text{ ungerade} \end{cases} \quad k = 2, 4.$$

Mit den Formeln

$$(8.7) \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$$

folgt daraus

$$(8.8) \quad a_{kM}^{(1)} + a_{kM}^{(3)} = - (a_{M-k,M}^{(2)} + a_{M-k,M}^{(4)}) \quad (1 \leq k \leq M-1).$$

Es sei nun I der Vektor vom Grad $M-1$, dessen Koeffizienten alle Eins sind und $D(X)$ der Vektor mit den

Koeffizienten $d_k(X) = g'(x_k)/g(x_k)$ ($-N + 1 \leq k \leq N$);
 ferner sei P die Permutationsmatrix vom Grad $M - 1$
 mit $p_{ik} = 1$ für $i + k = M$ und $p_{ik} = 0$ sonst. Wir zer-
 legen jeden Vektor:

$$(8.9) \quad X^T = (x_1^T, x_{-M}^T, x_2^T, x_0^T, x_3^T, x_M^T, x_4^T, x_{2M}^T),$$

wobei

$$(8.10) \quad x_k^T = (x_{-N+(k-1)M+1}, \dots, x_{-N+kM-1}) \quad (1 \leq k \leq 4).$$

Lemma 8.1

Ist Q ein Vektor von der Form

$$(8.11) \quad Q^T = (q_1^T, q_{-M}^T, (+Pq_2)^T, q_0^T, q_1^T, q_M^T, (+Pq_1)^T, q_{2M}^T)$$

mit $q_{-M} = q_M$ und $q_0 = q_{2M}$, so hat $Z = \tilde{E}WQ$ die Form

$$(8.12) \quad Z^T = (z_1^T, z, (-Pz_1)^T, z, z_1^T, z, (-Pz_1)^T, z)$$

mit $z = 0$.

Beweis: Es sei B_k ($1 \leq k \leq 4$) die Matrix mit den Elementen

$$a_{ij}^{(k)} (1 \leq i \leq M-1, 1 \leq j \leq M-1) \text{ und } \tilde{A}_M^{(k)T} = (a_{1M}^{(k)}, \dots, a_{M-1,M}^{(k)}),$$

dann ist unter Berücksichtigung von (8.8)

$$Z_1 = (B_1 + B_2P + B_3 + B_4P) Q_1 + S_1$$

$$Z_2 = (B_4 + B_1P + B_2 + B_3P) Q_2 - PS_1$$

(8.13)

$$Z_3 = (B_3 + B_4P + B_1 + B_2P) Q_3 + S_1$$

$$Z_4 = (B_2 + B_3P + B_4 + B_1P) Q_4 - PS_1$$

mit

$$S_1 = q_M(\tilde{A}_M^{(1)} + \tilde{A}_M^{(3)}) + q_0(\tilde{A}_M^{(2)} + \tilde{A}_M^{(4)}) .$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung, wenn wir beachten, daß wegen der erwähnten Eigenschaften von W gilt

$$(8.14) \quad B_1 = -PB_1P, \quad B_2 = -PB_4P, \quad B_3 = -PB_3P .$$

Ist jetzt X ein Vektor von der Form

$$(8.15) \quad X^T = (X_1^T, -\frac{\pi}{2}, (-PX_1 - \pi I)^T, 0, (X_1 + \pi I)^T, \frac{\pi}{2}, (-PX_1)^T, \pi),$$

so hat $\text{Log } g(X)$ wegen der Symmetriebedingung die Form

$$(8.11) \quad \text{mit } \log g(x_{-M}) = \log g(x_M) \text{ und } \log g(x_0) = \log g(x_{2M}), \text{ daher erhalten wir nach dem eben bewiesenen Lemma, daß}$$

$$U = C + \tilde{E}W \text{Log } g(X) = C + Z$$

die gleiche Form (8.15) wie X hat mit $U_1 = C_1 + Z_1$.
Wir fassen das bisherige Ergebnis dieses Abschnitts zusammen:

Lemma 8.2

Wählt man bei der nichtlinearen Iteration für den Ausgangsvektor X_0 einen Vektor der Form (8.15), so haben alle Iterierten

$$(8.16) \quad X_{i+1} = C + \tilde{E}W \operatorname{Log} g(X_i) \quad (i \geq 0)$$

die gleiche Form.

Lemma 8.3

Sind R , D und Y Vektoren von der Form (8.12), so hat

$$(8.17) \quad Z = \tilde{E}W\tilde{E} \operatorname{Diag}(D)Y - \tilde{E}R$$

die Form

$$(8.18) \quad Z^T = (Z_1^T, 0, (-PZ_1)^T, 0, Z_1^T, 0, (-PZ_1)^T, 0).$$

Der Beweis verläuft analog zu dem von Lemma 8.1, weil $\tilde{E} \operatorname{Diag}(D)Y$ von der Form (8.11) ist.

Ist bei festem i die äußere Iterierte X_i im Newton-Verfahren von der Form (8.15), so hat $D(X_i)$ und nach Lemma 8.1 auch

$$(8.19) \quad R_i = X_i - \tilde{E}W \operatorname{Log} g(X_i) - C$$

die Form (8.12). Die innere Iteration können wir, wie in § 7 erläutert, gemäß (8.17) durchführen und die Voraussetzungen des Lemmas 8.3 sind erfüllt. Es resultiert, daß auch X_{i+1} die Form (8.15) hat und durch Induktion erhalten wir das dem Lemma 8.2 entsprechende Ergebnis:

Lemma 8.4

Wählt man beim Newton-Verfahren für die äußere Iteration als Ausgangsvektor X_0 einen Vektor von der Form (8.15), also etwa $X_0 = C$ und als Ausgangsvektoren für die innere Iteration stets Vektoren Y_0 von der Form (8.12), dann haben die Iterierten Y_1 der inneren Iteration

$$(8.20) \quad Y_{1+1} = \tilde{E}W\tilde{E} \operatorname{Diag}(D(X_i))Y_1 - \tilde{E}R_i$$

($l \geq 0$, i fest)

stets die Form (8.12) .

Nach den Lemmata 8.2 und 8.4 genügt es, anstatt (8.16) und (8.20) ein auf die Ordnung $M - 1$ reduziertes System mit der Matrix

$$W_{\text{red}} = B_1 + B_2 P + B_3 + B_4 P$$

(vgl. (8.13)) zu lösen und das Ergebnis nach (8.15) zu einem Vektor der Ordnung $2N$ zu ergänzen. Diese Matrix ist aber antizentrosymmetrisch (vgl. AITKEN (1964)) und somit der theoretischen Untersuchung schwerer zugänglich als die schiefsymmetrische Matrix W . Wegen der engen Kopplung haben jedoch beide Vektorenfolgen bei gegebenem Relaxationsfaktor das gleiche Konvergenzverhalten, da die Iterierten des reduzierten Systems aus Koeffizienten der Iterierten des vollen Systems bestehen und umgekehrt.

§ 9. Eine Abschätzung für den Spektralbereich

Bei der RES nutzt man aus, daß W schachbrettförmig ist, d.h. $w_{jk} = 0$, falls $j - k$ gerade ist, und ordnet das System (8.16) bzw. beim Newton-Verfahren das System (8.20) so um, daß links zuerst die Koeffizienten mit ungeradem Index und dann die mit geradem Index kommen. Innerhalb jeder einzelnen Gleichung werden auf der rechten Seite die Summanden in gleicher Weise vertauscht. Ist Q die durch die Vertauschung festgelegte Permutationsmatrix, so sind die neuen Gleichungen

$$(9.1) \quad QX_{i+1} = QC + Q\tilde{E}WQ^T Q\text{Log } g(X_i) \quad (i \geq 0)$$

mit

$$(9.2) \quad J_Q(\theta) = Q\tilde{E}W \text{Diag}(D(\theta))\tilde{E}Q^T$$

bei der nichtlinearen Iteration und

$$(9.3) \quad QY_{l+1} = Q\tilde{E}W \text{Diag}(D(X_i))\tilde{E}Q^T QY_l - Q\tilde{E}R_i$$

$$(l \geq 0; i \text{ fest})$$

bei der inneren Iteration des Newton-Verfahrens.

Ist S die $N \times N$ - Matrix von "zyklischer Bauart" mit den Elementen

$$(9.4) \quad s_{1k} = \frac{1}{N} \operatorname{ctg} \frac{(1 - 2k)\pi}{2N} \quad (1 \leq k \leq N)$$

in der ersten Zeile, so gilt

$$(9.5) \quad Q W Q^T = \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S^T & 0 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix ist zwar schwach zyklisch vom Index 2, aber immer noch zu unhandlich. Um die Ergebnisse von § 8 ausnützen zu können, zerlegen wir S :

$$(9.6) \quad S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{pmatrix}$$

und bilden mit $U = S_1 + S_2$ die Matrix

$$(9.7) \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & U \\ 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & -U^T & 0 & 0 \\ -U^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Elemente von U sind nach (7.4), (9.5) und (9.6)

$$(9.8) \quad u_{jk} = \frac{1}{M} \operatorname{ctg} \frac{(2(j - k) - 1)\pi}{N} .$$

($1 \leq j \leq M, 1 \leq k \leq M$)

Setzen wir nun noch $\hat{E} = \tilde{Q}\tilde{E}Q^T$, so folgt aus den Lemmata 8.2 und 8.4 unter den dortigen Voraussetzungen

$$(9.9) \quad \tilde{Q}\tilde{E}W \operatorname{Log} g(X) = \hat{E}V\hat{E} Q\operatorname{Log} g(X)$$

und

$$(9.10) \quad \tilde{Q}\tilde{E}W \operatorname{Diag}(D(X))Y = \hat{E}V\hat{E} Q\operatorname{Diag}(D(X))Y ,$$

weil die Vektoren QY , $Q\operatorname{Log} g(X)$ und $QD(X)$ jetzt die Form

$$(9.11) \quad X^T =$$

$$(X_u^T, 0, (\pm PX_u)^T, X_u^T, 0, (\pm PX_u)^T, X_g, (\pm PX_g)^T, 0, X_g^T, (\pm PX_g)^T, 0)$$

haben, in der X_u bzw. X_g den Anteil von X_1 in (8.9) mit ungeraden bzw. geraden Indizes darstellt und P vom Grad $(M-1)/2$ ist, (das positive Vorzeichen gilt für $\operatorname{Log} g(X)$). Für die Konvergenz der Iterationen (9.1) und (9.3) ist also die Matrix

$$(9.12) \quad J_Q(X) = \hat{E}V\hat{E} Q\operatorname{Diag}(D(X))Q^T$$

maßgebend. V ist hier konvergent, weil W diese Eigenschaft hat. Wegen der ε -Bedingung in (7.5) ist daher $g(J_Q(X)) < \varepsilon$.

Wir suchen jetzt Schranken für die Realteile der EW von $J_Q(X)$, dazu sei o.B.d.A. $g(\xi)$ streng monoton wachsend für $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ (vgl. (7.5)), dann ist wegen der "Monotonie" jeder in Frage kommenden Lösung θ von (7.3)

$$(9.13) \quad g'(\omega_k)/g(\omega_k) > 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq M-1$$

und für $QD(\theta)$ folgt (vgl. (9.11))

$$(9.14) \quad d_u(\theta) > 0, \quad d_g(\theta) > 0.$$

Damit ergibt sich, daß in

$$(9.15) \quad T(\theta) = (Q \text{Diag}(D(\theta)) Q^T)^{1/2} = (\text{Diag}(QD(\theta)))^{1/2},$$

$$T^T = (T_1^T, t, iT_2^T, T_1^T, t, iT_2^T, T_3^T, iT_4^T, t, T_3^T, iT_4^T, t)$$

die Matrizen

$$(9.16) \quad T_1 = (\text{Diag}(D_u(\theta)))^{1/2}, \quad T_2 = (\text{Diag}(PD_u(\theta)))^{1/2},$$

$$T_3 = (\text{Diag}(D_g(\theta)))^{1/2}, \quad T_4 = (\text{Diag}(PD_g(\theta)))^{1/2}$$

reell sind (o.B.d.A. $t \neq 0$).

Für die innere Iteration des Newton-Verfahrens gelten die gleichen Überlegungen, wenn die Iterierten X_i hinreichend nahe bei Θ liegen. Ist allgemein X ein Vektor, der die Ungleichungen (9.14) erfüllt, so geht $J_Q(X)$ durch eine komplexe Ähnlichkeitstranformation über in $TJ_Q(X)T$ und der hermitesche Anteil dieser Matrix ist

$$(9.17) \quad H = \frac{1}{2}(TJ_Q T - \bar{T}J_Q \bar{T}) = \begin{pmatrix} 0 & H_1 \\ +H_1^* & 0 \end{pmatrix} .$$

Um auf H das Zeilensummenkriterium anwenden zu können, werden diejenigen Zeilen und Spalten gestrichen, deren Elemente Null sind, also wegen $\hat{E} = Q\tilde{E}Q^T$ die Zeilen und Spalten mit den Indizes

$$(9.18) \quad (M + 1)/2 , (3M + 1)/2 , 3M, 4M ,$$

dann erhalten wir für H_1 wegen (9.16)

$$(9.19) \quad H_1 = i \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & T_1 G T_4 \\ 0 & 0 & T_2 G T_3 & 0 \\ 0 & T_1 G T_4 & 0 & 0 \\ T_2 G T_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die $(M - 1)/2 \times (M - 1)/2$ - Matrix G hat nach (9.8) die Elemente

$$(9.20) \quad g_{jk} = -\frac{1}{M} \operatorname{ctg} \frac{(M-2(j-k))\pi}{2M} = -\frac{1}{M} \operatorname{tg} \frac{(j-k)\pi}{M}$$

$$(1 \leq j \leq \frac{M-1}{2}, \quad 1 \leq k \leq \frac{M-1}{2})$$

und für $c_M = \max_j \sum |g_{jk}|$ folgt

$$(9.21) \quad c_M = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} \left| \operatorname{tg} \frac{(1-k)\pi}{M} \right| = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{\frac{M-3}{2}} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{M}$$

$$c_M \leq \frac{1}{M} \int_0^{(M-1)/2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{M} dx = \frac{1}{\pi} \log \sin \frac{\pi}{2M}.$$

Diese Abschätzung ist schlecht, man rechnet besser c_M nach (9.21) direkt aus, zum Beispiel ist für $M = 9$ ($= 17$)

$$c_M < \frac{1}{3} \quad (\leq \frac{9}{17}).$$

§ 10. Aussagen über den Relaxationsfaktor

Nach § 2 übertragen sich Aussagen über die Relaxation in Gesamtschritten und in Einzelschritten von der inneren Iteration des Newton-Verfahrens auf die nicht-lineare Iteration, wir beschränken uns daher hier auf die Untersuchung des linearen Gleichungssystems

$$(C) \quad X = B X + C ,$$

wo für die EW λ von B gelten soll:

$$(10.1) \quad b \leq \operatorname{Re} \lambda \leq a < 1 , \quad |\operatorname{Im} \lambda| \leq c .$$

Als Anwendungsbeispiel behalten wir die Ergebnisse der vorhergegangenen Paragraphen dieses Kapitels im Auge. Unter den dortigen Voraussetzungen ergab sich für die bei der Lösung der THEODORSEN-Integralgleichung nach der Methode von WITTICH maßgebende, schwach zyklische Matrix (9.12)

$$(10.2) \quad -b = a = c_M \varepsilon , \quad c = \varepsilon .$$

Ist $\alpha > 0$ fest vorgegeben, so konvergiert nach

AGNEW (1944), NIETHAMMER (1967) die Relaxation in Gesamtschritten

$$(10.3) \quad X_{i+1} = (1 - \alpha)X_i + \alpha(BX_i + C) \quad (i \geq 0)$$

genau für alle Matrizen B, deren EW in dem offenen kreisförmigen Bereich

$$(10.4) \quad R_\alpha : \left| \zeta - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right| < \frac{1}{\alpha}$$

liegen. Ist andererseits bei festem B der hermitesche Anteil $(A + A^*)/2$ von $A = E - B$ positiv definit, so konvergiert die Folge (10.3) für $0 < \alpha < \alpha_g$ und α_g ist dadurch festgelegt, daß R_{α_g} der kleinste Kreis R_α ist, der alle EW von B enthält. Diese Überlegungen führen zu dem folgenden Satz, der für reelle EW schon von PETRYSHYN (1965) bewiesen wurde (siehe auch NIETHAMMER (1967), ISAACSON und KELLER (1966)).

Satz 10.1

Die EW λ von B mögen in dem Rechteck

$$R = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid b \leq \operatorname{Re} \lambda \leq a < 1, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \leq c \}$$

liegen, dann gilt

- (i) Die Relaxation in Gesamtschritten konvergiert für $0 < \alpha < \alpha_g$ mit

$$\alpha_g = \frac{2(1-a)}{(1-a)^2 + c^2} \quad \text{oder} \quad \alpha_g = \frac{2(1-b)}{(1-b)^2 + c^2},$$

je nachdem ob

$$b \geq 1 - \frac{c^2}{1-a} \quad \text{oder} \quad b < 1 - \frac{c^2}{1-a}.$$

- (ii) Man erhält den optimalen Konvergenzfaktor $\rho((1 - \alpha_0)E + \alpha_0 B)$ der Folge (10.3) für

$$\alpha_0 = \frac{2(2 - a - b)}{(2 - a - b)^2 + 4c^2}.$$

Beweis:(i): Wir bestimmen zunächst den Euler-Knopp-Kreis R_{α_1} , auf dessen Rand der Wert $\xi_1 = a + ic$ liegt. Nach (10.4) muß gelten

$$\frac{1}{\alpha_1^2} = (a - (1 - \frac{1}{\alpha_1}))^2 + c^2$$

oder

$$1 = (\alpha_1(a - 1) + 1)^2 + \alpha_1^2 c^2.$$

Daraus folgt

$$(10.5) \quad \alpha_1 = \frac{2(1-a)}{(1-a)^2 + c^2} \quad .$$

Liegt nun $\zeta_2 = b + ic$ im Innern oder auf dem Rand des Kreises R_{α_1} , was für $b = a$ sicher erfüllt ist, so ist $\alpha_1 = \alpha_g$. Ist $a \neq b$, so folgt wiederum nach (10.4) für b die Bedingung

$$(10.6) \quad \frac{1}{\alpha_1^2} \geq c^2 + (b - (1 - \frac{1}{\alpha_1}))^2 \quad .$$

In (10.5) sind Zähler und Nenner positiv, daher ergibt sich durch Einsetzen

$$((1-a)^2 + c^2)^2 \geq (2(1-a)(b-1) + (1-a)^2 + c^2)^2 + 4(1-a)^2 c^2$$

oder

$$0 \geq (1-a)(b-1)^2 + (b-1)(1-a)^2 + (b-a)c^2$$

oder

$$0 \geq (1-a)(b-1)(b-a) + (b-a)c^2 \quad .$$

Wegen $(a-b) > 0$ folgt

$$(10.7) \quad b \geq 1 - \frac{c^2}{1-a}$$

und die Schlußrichtung von (10.6) nach (10.7) ist umkehrbar. Ist $b < 1 - c^2/(1 - a)$, so ist der kleinste Kreis R_{α} dadurch festgelegt, daß der Wert $b_2 = b + ic$ auf dessen Rand liegen muß. Wir erhalten dann ebenso wie vorher

$$\alpha_g = \alpha_2 = \frac{2(1 - b)}{(1 - b)^2 + c^2} .$$

(ii): Die EW τ von $T_{\alpha} = (1 - \alpha)E + \alpha B$ liegen in dem rechteckigen Bereich G mit den Eckpunkten

$$\tau_1 = \tau_1(\alpha) = (1 - \alpha) + \alpha b_1, \tau_2 = \tau_2(\alpha) = (1 - \alpha) + \alpha b_2, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2,$$

und es ist

$$(10.8) \quad g(T_{\alpha}) = |\tau_1| \text{ oder } g(T_{\alpha}) = |\tau_2| .$$

Sind $u = u(\alpha)$ und $v = v(\alpha)$ komplexe Funktionen der reellen Variablen α ($0 \leq \alpha \leq \alpha_g$) mit gleichem Imaginärteil, dann nimmt

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |u(\alpha) + t(v(\alpha) - u(\alpha))|$$

nach einer geometrischen Überlegung genau für diejenigen α sein Minimum an, für die der Ausdruck $|u(\alpha) + v(\alpha)|/2$ minimal wird. Soll daher der maximale Betrag der Werte

auf dem oberen Rand von G sein (vorhandenes) Minimum für $\alpha = \alpha_0$ annehmen, so muß α_0 Extremalstelle der Funktion $|\tau_1(\alpha) + \tau_2(\alpha)|$ sein. Wegen $|\tau_1 + \tau_2| = |\overline{\tau}_1 + \overline{\tau}_2|$ wird dann gleichzeitig der maximale Betrag der Werte auf dem unteren Rand von G minimal und α_0 liefert nach (10.8) den optimalen Konvergenzfaktor. Nun ist

$$|\tau_1 + \tau_2|^2 = (\alpha(a + b) + 2(1 - \alpha))^2 + 4\alpha^2 c^2.$$

Setzen wir die Ableitung gleich Null, so folgt

$$[\alpha(a + b) + 2(1 - \alpha)](a + b - 2) + 4\alpha c^2 = 0$$

und daraus die Behauptung.

Für die RES haben YOUNG (1954) und NIETHAMMER (1964) den optimalen Konvergenzfaktor berechnet für den Fall, daß B schwach zyklisch vom Index 2 und hermitesch bzw. schieferhermitesch ist. Ein weiterer Satz lautet

Satz 10.2 (NIETHAMMER (1967))

In dem linearen Gleichungssystem $A X = X - B X = C$ sei die Matrix B schwach zyklisch vom Index 2. Ferner mögen die Eigenwerte λ von B im Innern

oder auf dem Rand der Ellipse

$$(10.9) \quad E_{\mu,r} : \zeta = \frac{\mu}{2} \left\{ \left(\frac{1}{r} + r \right) \cos \vartheta + i \left(\frac{1}{r} - r \right) \sin \vartheta \right\}$$

$$(0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 < r \leq 1)$$

liegen und 1 sei äußerer Punkt von $E_{\mu,r}$. Dann konvergiert die RES ($B = L + R$, vgl. § 2)

$$(10.10) \quad X_{i+1} = (1 - \omega)X_i + \omega L X_{i+1} + \omega R X_i \quad (i \geq 0)$$

optimal für

$$(10.11) \quad \omega = \omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}.$$

Der Konvergenzfaktor der Folge (10.10) ist

$$\rho((E - \omega_0 L)^{-1}((1 - \omega_0)E + \omega_0 R)) = \frac{|\omega_0 - 1|}{r^2}.$$

Ist in (10.2) $b = -a$, so gibt es stets Ellipsen $E_{\mu,r}$, welche sämtliche EW von B aber nicht den Punkt $\zeta = 1$ enthalten, nach Satz 10.2 konvergiert daher das zugehörige Iterationsverfahren, wenn B schwach zyklisch vom Index 2 ist. Allerdings ist der nach (10.11) berechnete Relaxationsfaktor bezüglich des Bereiches

(10.2) nicht mehr optimal, denn die Ellipse $E_{\mu,r}$ ist durch die Bedingung, daß $\sigma_1 = a + ib$ auf ihrem Rand liegen soll, nicht eindeutig bestimmt. Das optimale ω ergibt sich hier als Nullstelle eines Polynoms, dessen Grad größer als vier ist. Wir können jedoch den Bereich für ω angeben, in dem die RES konvergiert:

Satz 10.3

Es sei die Matrix B schwach zyklisch vom Index 2 und die EW λ von B mögen im Innern oder auf dem Rand des Rechtecks

$$(10.12) \quad R = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -a \leq \operatorname{Re} \lambda \leq a < 1, |\operatorname{Im} \lambda| \leq c\}$$

liegen. Dann konvergiert die RES (10.10) für

$$0 < \omega < \omega_g = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2+c^2}} \quad .$$

Beweis: In Satz 10.2 müssen r und die Brennweite μ der Ellipse $E_{\mu,r}$ solche Werte haben, daß 1 äußerer Punkt von $E_{\mu,r}$ ist. ω_g ergibt sich aus (10.11), wenn man die Brennweite μ_g derjenigen Ellipse E_g einsetzt, die durch die Punkte 1 und $a + ic$ geht. Sind $f \geq 0$ und $g \geq 0$ die Längen der großen bzw.

kleinen Halbachse der Ellipse (10.9), dann bestehen die Beziehungen

$$(10.13) \quad f = \frac{|\mu_g|}{2} \left(\frac{1}{r} + r \right), \quad g = \frac{|\mu_g|}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right) \quad (r \leq 1).$$

Für $a^2 + c^2 \leq 1$ ist f die Länge der reellen Achse von E_g und es folgt

$$(10.14) \quad 1 = \frac{|\mu_g|}{2} \left(\frac{1}{r} + r \right), \quad |\mu_g| = \frac{2r}{1 + r^2},$$

also ergibt sich nach (10.13) für g

$$g = \frac{1 - r^2}{1 + r^2}.$$

Aus der Bedingung, daß $a + ic$ auf dem Rand von E_g liegen soll, erhalten wir andererseits

$$g^2 a^2 + c^2 = g^2, \quad g = \frac{c}{\sqrt{1 - a^2}}$$

und damit ergeben sich aus

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2} = \frac{c}{\sqrt{1 - a^2}}$$

die Größen r^2 und $r^2 + 1$:

$$r^2 = \frac{\sqrt{1-a^2} - c^2}{\sqrt{1-a^2} + c^2}, \quad r^2 + 1 = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2} + c^2}.$$

Aus (10.14) folgt

$$1 - |\mu_g|^2 = \frac{c^2}{1 - a^2}$$

und für ω_g berechnen wir aus (10.11) den Wert

$$\omega_g = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2} + c^2}.$$

Für $a^2 + c^2 > 1$ ist g die Länge der reellen Achse von E_g und es folgt

$$|\mu_g| = \frac{c^2}{1 - r^2}.$$

Der Rest des Beweises verläuft wie im ersten Teil, wenn man beachtet, daß jetzt μ_g rein imaginär, also

$$\mu^2 = - |\mu|^2 \text{ ist.}$$

Literaturverzeichnis

AGNEW, R.P. (1944):

Euler transformations. Am. Journ. of Math. 66
313 - 340.

AITKEN, A.C. (1964):

Determinants and matrices. 9. Aufl., Oliver and
Boyd, Edinburgh 1964.

ALEFELD, G. (1968):

Über die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit
des allgemeinen Relaxationsverfahrens bei
nichtnegativen Matrizen. Computing 3, 258 - 267.

AMANN, H. (1968):

Über die Existenz und iterative Berechnung einer
Lösung der Hammerstein'schen Gleichung. Aeq.
Math. 1, 242 - 266.

ANSELONE, P.M. (1964):

Nonlinear integral equations. Univ. of Wisconsin
Press, Madison, Wisc. 1964.

APOSTOLATOS, N., und KULISCH, U. (1967):

Über die Konvergenz des Relaxationsverfahrens
bei nicht-negativen und diagonaldominanten
Matrizen. Computing 2, 17 - 24.

BROWDER, F. (1962):

The solvability of non-linear functional
equations. Duke Math. J. 30, 557 - 566.

FROBENIUS, G. (1912):

Über Matrizen aus nicht negativen Elementen.

S.-B. Preuss. Ak. Wiss., Berlin 1912, 456 - 477.

GAIER, D. (1964):

Konstruktive Methoden der konformen Abbildung.

Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg

1964).

GOLOMB, M. (1935):

Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichun-

gen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen

Funktionalgleichungen. Math. Z. 39, 45 - 75 .

HAMMERSTEIN, A. (1930):

Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwen-

dungen. Acta Math. 54, 117 - 176.

HOUSEHOLDER, A.S. (1964):

The theory of matrices in numerical analysis.

Blaisdell, New York-Toronto-London 1964.

ISAACSON, E., and KELLER, H.B. (1966):

Analysis of numerical methods.

John Wiley, New York-London-Sydney 1966.

KAHAN, W. (1958):

Gauß/Seidel methods of solving large systems

of linear equations. Doctoral Thesis, Univer-

sity of Toronto 1958.

MINTY, G.J. (1963):

On a "monotonicity" method for the solution
of nonlinear equations in Banach spaces.

Proc. Nat. Akad. Sci. USA 50, 1038 - 1041.

NIETHAMMER, W. (1964):

Überrelaxation bei linearen Gleichungssystemen
mit schiefsymmetrischer Koeffizientenmatrix.

Diss., Univ. Tübingen 1964.

----- (1966):

Iterationsverfahren bei der konformen Abbildung.

Computing 1, 146 - 153.

----- (1967):

Iterationsverfahren und allgemeine Euler-

Verfahren. Math. Z. 102, 288 - 317.

NYSTRÖM, E.J. (1930):

Über die praktische Auflösung von Integral-
gleichungen mit Anwendungen auf Randwertauf-
gaben. Acta Math. 54, 185 - 204.

OSTROWSKI, A.M. (1952):

On a discontinuous analogue of Theodorsen's and
Garricks's method. Nat. Bur. Stand., Appl. Math.
Ser. 18, 165 - 174.

----- (1954):

On the linear iteration procedures for symmetric
matrices. Rend. Mat. e Appl. 14, 140 - 163.

OSTROWSKI, A.M. (1966):

Solution of equations and systems of equations.

Academic Press, New York-London 1966.

PERRON, O. (1907):

Zur Theorie der Matrizen. Math. Ann. 64, 248 - 263.

PETRYSHYN, W.V. (1965):

On the extrapolated Jacobi or simultaneous displacements method in the solution of matrix and operator equations. Math. of Comput. 19, 37 - 55.

REICH, E. (1949):

On the convergence of the classical iterative method of solving linear simultaneous equations.

Am. Math. Statist. 20, 448 - 451.

STEIN, P., and ROSENBERG, R.L. (1948):

On the solution of simultaneous equations by iteration. J. London Math. Soc. 23, 111 - 128 .

THEODORSEN, T. (1931):

Theory of wing sections of arbitrary shape.

NACA Report 411 (1931).

----- , and GARRICK, I.E. (1933):

General potential theory of arbitrary wing sections. NACA Report 452 (1933).

VAINBERG, M.M. (1964):

Variational methods for the study of nonlinear operators. Holden Day, San Francisco, Calif. 1964.

VARGA, R.S. (1962):

Matrix iterative analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1962.

WITTICH, H. (1941):

Bemerkungen zur Druckverteilungsrechnung nach Theodorsen-Garrick. Jahrb. dtsh. Luftfahrt-Forsch. 1941, 152 - 157.

YOUNG, D. (1954):

Iterative methods for solving partial differential equations of elliptic type. Trans. Am. Math. Soc. 76, 92 - 111.

ZURMÜHL, R. (1964):

Matrizen. 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964.

Lebenslauf

Am 8. Juni 1940 wurde ich, Eckart Gekeler, als Sohn des Arztes Dr. med. Werner Gekeler und seiner Ehefrau Anne, geb. Zeller, in Tübingen geboren. Nach dem Besuch der Grundschule war ich Schüler an Gymnasien in Tübingen und Reutlingen und legte im Frühjahr 1959 am Friedrich-List-Gymnasium in Reutlingen die Reifeprüfung ab. Vom Wintersemester 1959/60 an studierte ich an der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen Mathematik und Physik und bestand dort im Frühjahr 1966 die Diplom-Prüfung in Mathematik. Seit dem 1. Juli 1966 bin ich als Verwalter der Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum angestellt. In dieser Zeit entstand unter Anleitung von Herrn Doz. Dr. W. Niethammer die vorliegende Dissertation.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren W.Braunbek, H.Ehlich, B.Huppert, H.Kneser, H.Krüger, G.Möllenstedt, M.Müller, G.Pickert, P.Roquette, H.H.Schaefer, H.Wielandt und K.Zeller.

BAMBERGER FOTODRUCK - RUDOLF RODENBUSCH
8600 BAMBERG - Markusplatz 22 - Tel.: 09 51/6 2794